이산수학 퀴즈시험 1

2013.10.1

학번 _____ 이름 _____

1. $P = (s \to (p \wedge \sim r)) \wedge ((p \to (r \vee q)) \wedge s)$, $Q = p \vee t$ 이라면 $P \equiv Q$ 인가? 증명 (혹은 반증)하라. [10점]

No. For $P \equiv Q$ to be true, they must be equivalent for all truth value assignments of p, q, r, s, t. But for $t = T, s = F$, $Q = T$ and $P = F$.

2. 아래와 같은 추론은 정확한가? 증명 (혹은 반증) 하라. [10점]

$$\frac{(p \to q) \wedge (r \to s) \quad p \vee r}{\therefore q \vee s}$$

1. $p \to q$
2. $r \to s$
3. $p \vee r$
4. $\sim p \to r$ (equivalence, 3)
5. $\sim p \to s$ (HS, 4,2)
6. $\sim s \to p$ (contragositive, 5)
7. $\sim s \to q$ (HS, 6,1)
8. $s \vee q$ (equivalence, 7)

4. **P(x)** 는 **"x is an accountant," Q(x)** 는 **"x owns a Porsche"** 로 정의할 때, 다음의 각 명제와 그 부정을 각각 기호를 써서 (symbolically) 표기하라. [각 2점, 총 16점]

A. **All accountants own Porsche.**

$\forall x\,(P(x) \to Q(x))$	$\exists x\,(P(x) \wedge \sim \boldsymbol{Q(x)})$

B. **Some accountant owns a Porsche.**

$\exists x\,(P(x) \wedge \boldsymbol{Q(x)})$	$\forall x\,(\sim P(x) \vee \sim Q(x))$ 혹은 $\forall x\,(P(x) \to \sim Q(x))$

C. **All owners of Porsche are accountants.**

$\forall x\,(Q(x) \to P(x))$	$\exists x\,(\sim P(x) \wedge \boldsymbol{Q(x)})$

D. **Some who owns a Porsche is an account.**

$\exists x\,(P(x) \wedge \boldsymbol{Q(x)})$	$\forall x(\sim P(x) \vee \sim Q(x))$ 혹은 $\forall x\,(P(x) \to \sim Q(x))$

3

4. Domain of discourse가 $R \times R$ 일 때 다음 명제가 참인지 거짓인지 결정하고 그 이유를 설명하라. [각 5점, 총 10점]

A. $\forall x \exists y ((x < y) \rightarrow (x^2 < y^2))$

True. For all x, we set $y = x-1$. Then the proposition becomes vacuously true.

B. $\forall x \forall y ((x < y) \rightarrow (x^2 < y^2))$

False. Counter-example: $x=-3, y=2$

6. $A\Delta(B \cup C) = (A\Delta B) \cup (A\Delta C)$ 를 증명 (혹은 반증) 하여라 [10점]

거짓. 예를 들어 A={1,2,3}, B={2,3,4}, C={1,2,4} 일 때 좌변은 {4} 우변은 {1,3,4}.

→ 5

7. 모든 실수 x,y에 대하여 만일 $xy \leq 2$ 이면 $x \leq \sqrt{2}$ 혹은 $y \leq \sqrt{2}$임을 증명 (반증) 하라. [10점]

$x > \sqrt{2}$ 이고 $y > \sqrt{2}$ 이라고 가정하자. 그러면 $xy > 2$ 로 모순이 된다. 따라서 주어진 명제는 참이다. (간접증명법 – proof by contrapositive)

→ 6

7. 다음을 resolution과 간접증명법(proof by contradiction)에 의해 증명하여라. [10점]

$$\begin{array}{l} a \rightarrow (b \rightarrow c) \\ a \rightarrow b \\ \underline{\quad a \quad} \\ \therefore c \end{array}$$

In clause form, the given hypotheses are

1. $\sim a \vee \sim b \vee c$
2. $\sim a \vee b$
3. a
4. $\sim c$

5. $\sim a \vee \sim b$ (1,4)
6. b (2,3)
7. $\sim b$ (3,5)
8. Contradiction (6,7)

$\therefore$ The argument is valid.

8. 수학적 귀납법 (mathematical induction)에 의해 $n \geq 1$ 인 모든 n 에 대해 $7^n - 1$이 6으로 나누어 떨어짐을 증명하여라. [10점]

(basis) $n=1$

$7^1 - 1 = 6$: divisible by 6.

(inductive step)

we assume that $7^n - 1$ is divisible by 6. we must then show $7^{n+1} - 1$ is divisible by 6.

$7^{n+1} - 1 = 7(7^n - 1) + 6$ is divisible by 6 since both $7 \cdot (7^n - 1)$ and 6 are divisible by 6.

Since the basis and the inductive step have been verified, the Principle of Mathematical Induction tells us that

$7^n - 1$ is divisible by 6 for all $n \geq 1$.