이산수학 중간고사 1

2012.10.16.

학번 _____ 이름 _____

1. If Jill can sing or Dweezle can play, then I will buy the compact disc. Jill can sing. I will buy the compact disc player. 이 주어져 있을 때 추론 규칙 (rules of inference)을 사용하여 I'll buy the compact disc and the compact disc player. 가 결론으로 유도됨을 증명하라. 추론의 각 단계에서 사용한 규칙들을 명시하라. [5점]

2. (1) 번 문제를 resolution refutation, 즉 resolution과 proof by contradiction으로 증명하라. [5점]

3. L 은 다음과 같은 두 가지 규칙을 반복적으로 적용함으로서 생성되는 모든 string들의 집합 (즉 언어)이다. (1) 만일 $\alpha \in L$ 이면 $a\alpha b \in L$ 이고 $b\alpha a \in L$ 이다. (2) 만일 $\alpha \in L$ 이고 $\beta \in L$ 이고 $\alpha\beta \in L$ 이다. 이 때, baaabb가 L에 속함을 증명하여라. 단, null string λ 도 L에 속한다. [3점]

4. 수학적 귀납법 (mathematical induction)에 의해 $n \geq 1$ 인 모든 n 에 대해 $3^n + 7^n - 2$가 8로 나누어 떨어짐을 증명하여라. [5점]

5. RSA 방식에서 두 소인수를 p=19, q=27 로 잡을 때 public key를 (n,e), private key를 (n,d)라고 하자. 이 때 n=pq 이며 e와 d는 서로 inverse modulo 이다. 또한 ϕ=(p-1)(q-1)이다. e 를 7로 잡았을 때 [주의!!! : 숫자의 역할에 따른 notation 이 교과서와 다를 수 있음]

   A. d ($\geq$ 0) 의 값을 계산하라. [6점]

   B. 암호화해야 할 메시지를 m이라고 하자 이 때 m=13 이면 암호화된 메시지 c 의 값은 얼마인가? 간단하게 식을 적고 답하라. [2점]

   C. c=17 이다. 그렇다면 암호화 되기 전의 메시지 m 의 값은 얼마인가? 간단하게 식을 적고 답하라. [7점]

6. 행렬을 통해 아래에 주어진 관계 R에 대해 다음의 각 항목에 Y/N로 답하고 간단히 이유를 말하라.

A. Reflexive 인가? [1점]

B. Symmetric 인가? [1점]

C. Anti-symmetric 인가? [1점]

D. Transitive 인가? [3점]

E. Partial order 인가? [1점]

F. Total order 인가? [2점]

G. Equivalence relation 인가? [1점]

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. 알고리듬의 복잡도란, 수행되는 operation 개수가 가장 많아지는 모양의 (즉 최악의) 입력(input) 이 들어왔을 때의 operation 수를 함수로 정리한 뒤, 그 함수의 upper bound 를 "O" notation으로, lower bound를 "Ω" notation으로 표기한 것이다. 다음 알고리듬이 수행될 때

A. "최악의 입력"은 어떤 모양인지 말로 간단히 써라. [1점]

B. 이 때 비교 operation "$val < s_j$" 의 수행 횟수를 함수 f(n)으로 나타내어라. [5점]

C. O notation으로 f(n)을 표시하고 그것을 증명하여라. [2점]

D. Ω notation으로 f(n)을 표시하고 그것을 증명하여라. [4점]

This algorithm sorts the sequence $s_1, \ldots, s_n$ in nondecreading order

Input: s, n

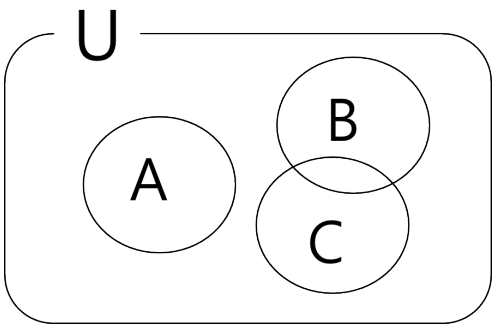
Output: s (sorted)

```
insertion_sort(s,n) {
    for i=2 to n {
        val = s_i  // save s_i so it can be inserted into the corrected place
        j = i-1
        // if val < s_j, move s_j right to make room for s_i
        while (j≥1 ∧ val<s_j) {
            s_{j+1} = s_j
            j = j-1
        }
        s_{j+1} = val  // insert val
    }
}
```

8. Sample space를 집합 U 로 표기하자. 이 때 세 가지의 event A, B, C를 Venn Diagram으로 표현하면 아래 그림과 같으며, 각각의 확률은 다음과 같이 주어진다: P(A)=0.3, P(B)=0.3, P(C)=0.2, P(B∩C)=0.06. 이 때,

   A. Event A와 B는 독립(independent)인가? Y/N로 답하고 간단히 증명하라. [3점]

   B. Event B와 C는 독립인가? Y/N로 답하고 간단히 증명하라. [3점]



9. 모든 실수 x, y에 대하여 $\lceil x+y \rceil = \lceil x \rceil + \lceil y \rceil$ 는 true인가? True이면 증명하고, 아니면 반례 (counterexample)를 들어라. [3점]

10. 두 숫자 68718952447 과 1095 의 최대공약수는 얼마인가? Euclid 알고리듬을 써서 구하라. [3점]

11. 어느 나라에 치명적인 조류독감 (bird flu) 이 10년만에 재발했다. 이 나라의 보건당국이 파악한 바에 따르면 전체 인구의 10% 가 현재 감염되어 있으며, 또 다른 15%는 10년 전에 이미 감염되었다가 나아서 면역인 상태이다 (면역인 사람은 전염되지 않으며, 바이러스를 갖고 있지도 않다). 이 때 어떤 제약회사가 독감 바이러스 감염 여부를 판정해 주는 즉석 테스트 시약을 개발했는데, 이것을 써서 테스트하면 독감 바이러스를 가진 환자에서 양성 반응이 나올 확률이 95% 이고, 바이러스를 가지지 않은 사람에서 양성 반응이 나올 확률이 2% 이라고 한다.

A. 감염이나 면역 여부를 알 수 없는 어떤 불안한 시민이 이 테스트를 받았더니 양성 (positive) 반응이 나왔다. 이 시민이 실제로 감염되었을 확률은 얼마인가? 유도식을 보이고, 소수점 첫째 자리까지 답을 계산하라. [10점]

B. 감염율이 10%가 아니라 0.01%라고 하면 이 테스트를 사용할 때 예상되는 문제점은 무엇인가? 숫자가 아니라 (수업시간에 논의한 대로) 짧은 설명으로 답하라. [4점]

12. 어느 편의점 체인의 물품 재고 목록(inventory)에는 115가지의 상품 항목이 나타나 있는데 각 항목은 "재고 있음" 혹은 "재고 없음"으로 체크를 할 수 있게 되어 있다. 이 때 고려대 지점에 60 가지의 물품만 재고가 있다면 재고 목록에서 정확히 4칸 떨어진 상품 항목이 최소한 한 쌍은 있어야 함을 증명하라. [5점]

13. P(x) 는 "x is an accountant," Q(x) 는 "x owns a Porsche" 로 정의할 때, 다음의 각 명제와 그 부정을 각각 기호를 써서 (symbolically) 표기하라. [4점]

A. All owners of Porsche are accountants.

B. Some who owns a Porsche is an account.

14. Domain of discourse가 실수의 곱집합 $\mathrm{R} \times \mathrm{R}$ 일 때 다음 명제가 참인지 거짓인지 결정하고 그 이유를 설명하라. [각 5점, 총 10점]

A. $\forall x \forall y \left((x < y) \rightarrow (x^2 < y^2)\right)$

B. $\exists x \exists y \left((x < y) \rightarrow (x^2 < y^2)\right)$