답안지

이산수학 중간고사 2

2013.11.26

학번 _____ 이름 _____

1. 두 그림의 평균 명도 (average brightness) 차이가 일정한 작은 범위 내에 있을 때 "similar", 그렇지 않을 때 "dissimilar" 라고 판정한다고 하자. 6개의 그림이 있을 때 이 중 3개는 mutually similar 하거나 mutually dissimilar 해야 함을 Pigeon Hole Principle (3rd form)을 이용하여 증명하라. [10점] p. 328

이 그림들을 $P_1, P_2, \dots, P_6$ 라고 하자. 다음의 다섯 쌍은 각각 similar 혹은 dissimilar 값을 갖는다.

(P_1, P_2), (P_1, P_3), (P_1, P_4), (P_1, P_5), (P_1, P_6).

Pigeon Hole Principle 에 따르면, 이 중 같은 값을 갖는 쌍이 최소한 $\lceil 5/2 \rceil = 3$ 개 있다. 이들을

(P_1, P_i), (P_1, P_j), (P_1, P_k)

라 하자. 편의상 이들은 similar 하다고 하자. 그런데 만일

(P_i, P_j), (P_j, P_k), (P_i, P_k)

중 하나라도 similar 하면 그 쌍과 P_1은 mutually similar가된다. 반대로 P_i, P_j, P_k가 모두 dissimilar 하면 P_i, P_j, P_k는 3개의 mutually dissimilar 한 그림들이다.

2. 피보나치 수열의 일반항 f(n)을 n의 함수로 구하라. 유도과정에서 recurrence relation 을 이용하라. [10점] p. 352

피보나치 수열은 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ $(n \geq 3)$ 의 recurrence relation과 $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ 의 초기 조건으로 표현된다. 위의 recurrence relation은 linear homogeneous 이므로 특성 방정식을 이용해 일반항 f_n을 구할 수 있다. 즉, $t^2 - t - 1 = 0$ 을 풀면 $t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$의 해를 얻으므로 일반항 $f_n = b\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + d\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ 이며, 이 때 b 와 d는 상수이다. 초기조건을 대입하여 풀면 $b = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $d = -\frac{1}{\sqrt{5}}$를 얻고, 따라서

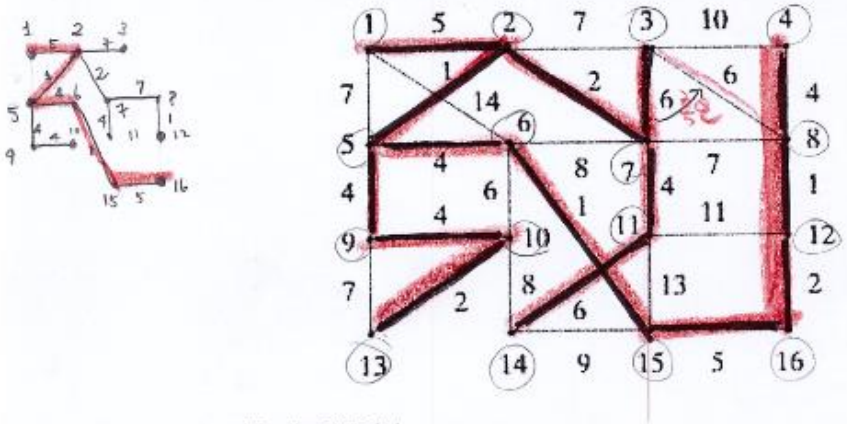
$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$ 이다.

3. 다음 주어진 그래프에서

A. Minimum spanning tree (MST)에 속한 edge를 굵게 강조하라 [5점]

B. 노드 "1"로부터의 shortest path tree (SPT)를 계산했을 때 노드 "1"로부터 노드 "16"까지의 거리는 (A)에서 계산한 MST 상의 "1"로부터 "16"까지의 거리보다 얼마나 짧은가? [5점] 0 (동일하다)

C. 노드 "1"을 MST의 root로 지정했을 때, depth-first traversal을 수행하는 경우 노드의 방문 순서를 적어라. [5점] 1→2→5→9→10→13→6→15→16→12→8→4→7→11→14→3

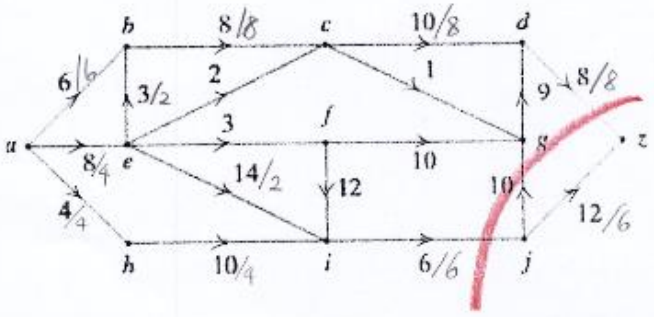


4. 다음 네트워크에서

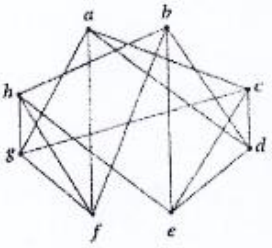
A. Maximum flow의 값은 얼마인가? 14 [5점]

B. (A)에서 구한 maximum flow를 구성하는 edge 상의 flow 값을 표시하라 [7점]

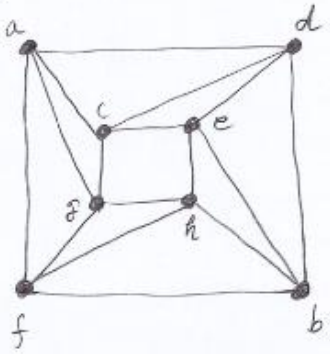
C. Minimum cut을 그림 위에 표시하라. [5점]



5. 다음 그래프는 plannar 인가? Yes/No로 답하고 증명하라. [10점]



Yes.



6. 다음 게임트리는 square 플레이어가 다음 move를 결정해야 할 시점에서 본 것이다. Square 플레이어 는 이득을 maximize하려고 하고, circle 플레이어는 square 플레이어의 이득을 minimize하려고 한다.

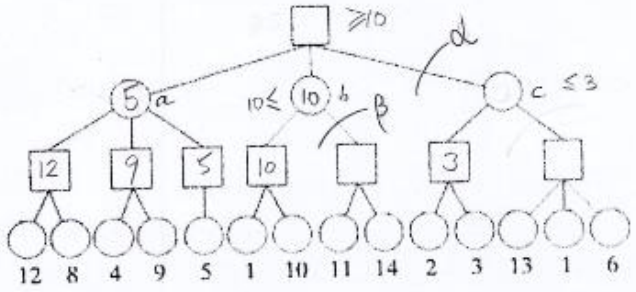
A. 네모 플레이어의 현재 플레이 위치 (root)의 최종 평가 이득은 얼마인가? [10점]

10

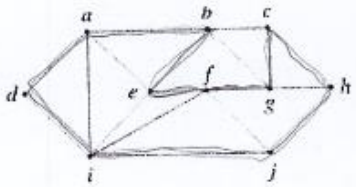
B. 평가에 따르면 a,b,c 중 어느 child 쪽으로 move해야 하는가? [3점]

b

C. α-pruning이 일어나는 위치와 β-pruning이 일어나는 위치를 트리 위에 모두 표시하라. 단, 교과서의 방식에 따라 더 평가해 보지 않아도 되는 child를 가진 parent 노드 바로 위에서 pruning 하는 것으로 표시하라. [5점]



7. 다음 그래프는



A. Euler cycle이 있는가? Yes/No로 대답하고 증명하라. [5점]

No. There are vertices with odd degrees (e.g. c)

B. Hamiltonian cycle을 구하라. (Traverse하는 노드들을 순서대로 적어라)[5점]

a → b → e → f → g → c → h → j → i → d → a

8. Decision tree에서 각 노드는 1번의 비교를 표시한다. n개의 서로 다른 정수가 있을 때 이들을 sorting하기 위한 비교 횟수를 f(n) 라고 하자. 이 때 f(n)=Ω(n lg n)임을 보여라. 단, n! = Θ(n lg n)임을 이용하라. [10점] 문제 typo p.484

→ lg n!

이 decision tree의 height를 h 라 하자. 즉, 최악의 경우, h 번의 비교를 함으로써 sorting을 하게 된다. 이 decision tree는 최소 $n!$ 개의 terminal이 있어야 하고, $\lg n! \le h$ 이다. ① 주어진 조건 $\lg n! = \Theta(n \lg n)$ 을 이용하여, 어떤 상수 C 가 존재했을 때

$$C n \lg n \le \lg n! \quad ②$$

이다. 우리는 최악의 경우 최소한 필요한 비교횟수를 구하여야 하므로 $h = f(n)$ 이라 놓고, ① 과 ② 를 이용하면 $C n \lg n \le f(n)$ 을 얻는다. 즉 $f(n) = \Omega(n \lg n)$ 이다.